

Tentamen i MSG110 Sannolighetsteori, 7.5 högskolepoäng, Göteborgs Universitet.

Tid: Måndagen den 17 Augusti 2015, kl. 8.30-12.30.

Examinator och Jour: Olle Nerman , telefon: 772 3565, rum 3056, MV, Chalmers.

Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.

Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

1. Betrakta en urna med **100** numrerade (från **1** till **100**) bollar. Du drar succesivt bollar en åt gången och lägger hela tiden tillbaka den dragna bollen innan nästa dragning. Låt X_n vara maximala ”poängen” bland de n första dragna bollarna.
 - a. Vad är fördelningsfunktionen för X_{10} evaluerad i $x=25$? (1p)
 - b. Vad är fördelningsfunktionen för X_{10} evaluerad i $x=24$? (1p)
 - c. Vad är sannolikhetsfunktionen (=diskreta frekvensfunktionen) för X_{10} evaluerad i punkten $x=25$? (1p)
2. Den tvådimensionella kontinuerliga stokastiska variabeln (X,Y) är likformigt fördelad på en kvadrat med hörn i koordinatparen $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ och $(1,-1)$.
 - a. Bestäm sannolikhetsstätheten för (X,Y) . (1p)
 - b. Beräkna korrelationskoefficienten mellan X och Y . (2p)
 - c. Är X och Y oberoende av varandra? (Motivera!) (2p)
3. Som en modell för resultatet i en viss bandymatch använder du att det ena laget gör ett Poissonfördelat antal mål, X , med väntevärdet **2** och det andra laget ett Poissonfördelat antal mål, Y , med väntevärdet **3**. Du antar också att X och Y är oberoende av varandra. Vad är då:
 - a. sannolikheten att matchen slutar **0-0**? (1p)
 - b. sannolikheten att matchen slutar **3-1** till det första laget? (1p)
 - c. sannolikheten att det blir totalt exakt **5** mål i matchen? (1p)
 - d. betingade sannolikheten att det första laget (det med väntevärdet=**1** ovan) vinner matchen, givet att totala antalet mål i matchen är exakt **5**? (2p)
4. Ett sätt att få fram en flexibel tvåparametrig modell (=fördelningsklass) är att utgå från en enda sannolikhetsstäthet $f(x)$ definierad på hela reella linjen med väntevärdet = **0** och standardavvikelsen = **1**, och genom att skala och translatera f bilda en familj av frekvensfunktioner:
 $f(x ; \mu, \sigma)=f((x-\mu)/\sigma)/\sigma$ för godtyckliga parametrar μ och $\sigma>0$.
 - a. Härled momentskattningarna för μ och σ om du har ett stickprov av storleken n i en sådan modell. (2p)
 - b. Undersök om var och en av de båda skattningarna i a) är väntevärdesriktig eller ej? (2p)
5. En viss sjukdom förekommer hos **50**-åriga kvinnor i Göteborg med en okänd sannolikhet p . Du har observerat att hos ett slumpmässigt urval av **300** **50**-åriga kvinnor i Göteborg så hade **45** av dem sjukdomen. Bestäm ett symmetriskt konfidensintervall för p med approximativ konfidensgrad **95%**. (3p)

6. Antag att \mathbf{X} är negativt binomialfördelad med antalsparameter $\mathbf{15}$ och okänd sannolikhetsparameter \mathbf{p} . Härled Maximum Likelihoodskattningen baserad på en enda x -observation av:
- sannolikhetsparametern \mathbf{p} . (2p)
 - väntevärdet av \mathbf{X} . (2p)
7. I ett visst normalfördelningsstickprov har du beräknat \mathbf{p} -värdet för att ensidigt t-test av nollhypotesen att väntevärdet $\mathbf{=0}$ till $\mathbf{0.037}$. Om du därefter även beräknar ett observerat symmetriskt konfidensintervall med konfidensgrad $\mathbf{95\%}$ för väntevärdet; -kommer detta intervall då att innehålla punkten $\mathbf{0}$? (Motivera svaret) (2p)
8. Antag att \mathbf{X} är en stokastisk variabel med ändlig varians.
- Använd på lämpligt sätt det faktum att alla varianser är icke-negativa, och visa att väntevärdet av absolutavvikelsen från väntevärdet, $\mathbf{E[|X-E[X]|]}$, är mindre än eller lika med standardavvikelsen för \mathbf{X} . (3p)
 - Hur skall fördelningen för \mathbf{X} se ut för att $\mathbf{E[|X-E[X]|]}$ ska vara exakt lika med standardavvikelsen för \mathbf{X} ? (1p)